2018-2019 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT102 ANALİZ II ARASINAV SORULARI

ADI SOYADI:

NUMARASI-GRUBU:

1	2	3	4	5	6	7	8	TOPLAM

1. $y=f(x)$ fonksiyonunun $(-2,1)$ noktasından geçen teğeti, $x-$ekseni ile 45° açı yapmaktadır. $h(x)=\dfrac{f(x)}{x^2+1}$ ise $h'(-2)$ değeri nedir, bulunuz.

2. **(a)** Lagrange (Ortalama Değer) teoremini ifade ediniz.

   (b) Her $x\in\mathbb{R}$ için $e^x \geq 1+x$ olduğunu gösteriniz.

3. **(a)** $y=\sinh\left(\arctan e^{3x}\right)$ ise $y'=\dfrac{dy}{dx}$ nedir, bulunuz.

   (b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\tan\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$ limitini hesaplayınız.

4. **(a)** $\displaystyle\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$ integralini hesaplayınız.

   (b) $\displaystyle\int\left(4x^2-12x+9\right)^{\frac{2}{3}}dx$ integralini hesaplayınız.

5. $(a,b)\subset\mathbb{R}$ üzerinde türevli bir $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x\in(a,b)$ için $f'(x)<0$ ise f fonksiyonu (a,b) üzerinde azalandır, gösteriniz.

6. **(a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^2+2\cos x-2}$ limitini hesaplayınız.

   (b) $y=\dfrac{\arccos x}{x}+\ln\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}}$ ise $y'=\dfrac{dy}{dx}$ nedir, bulunuz.

7. $x^y=y^x$ şeklinde verilen $y=f(x)$ fonksiyonu için $\dfrac{dy}{dx}$ türevini hesaplayınız. Bu fonksiyonun $(1,1)$ noktasındaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz.

8. $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ fonksiyonunu inceleyip ayrıntılı grafiğini çiziniz.

Not: Sadece 6 soru cevaplayınız. Süre 120 dakikadır.

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR & Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

12.04.2019

2018-2019 EĞİTİM-ÖĞRETİM YILI MAT102 ANALİZ II
ARASINAV SORU VE ÇÖZÜMLERİ

1) $y=f(x)$ fonksiyonunun $(-2,1)$ noktasından geçen teğeti, x-ekseni ile $45°$ açı yapmaktadır. $h(x)=\dfrac{f(x)}{x^2+1}$ ise $h'(-2)=?$

Çözüm: $$h'(x)=\frac{f'(x)\cdot(x^2+1)-2x\cdot f(x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(-2)=m_T=\tan 45=1 \Rightarrow \boxed{f'(-2)=1}$$

$$h'(-2)=\frac{f'(-2)\cdot((-2)^2+1)-2\cdot(-2)\cdot f(-2)}{((-2)^2+1)^2}=\frac{1\cdot 5-(-4)\cdot 1}{5^2}=\frac{9}{25}, \quad \boxed{h'(-2)=\frac{9}{25}}$$

2) (a) Lagrange (Ortalama Değer) Teoremini ifade ediniz.
(b) $\forall x\in\mathbb{R}^+$ için $e^x\geq 1+x$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (a) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli ve $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ türevli ise $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır.

b) $[0,x]$ aralığında $f(x)=e^x$ fonksiyonu süreklidir, $(0,x)$ açık aralığında da türevlidir. Böylece Lagrange Teoremine göre
$$f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$ olacak şekilde bir $c\in(0,x)$ vardır.
$$e^c\cdot x=e^x-1 \Rightarrow e^x=1+e^c\cdot x \overset{(c>0)}{\geq} 1+x \Rightarrow e^x\geq 1+x$$ bulunur.

3) a) $y=\sinh(\arctan e^{3x})$ ise $y'=\dfrac{dy}{dx}=?$

b) $$\lim_{x\to 1^+}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}=?$$

Çözüm: a) $u=3x$, $v=e^u$, $w=\arctan v$, $y=\sinh w$ denilip,
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dw}\cdot\frac{dw}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cosh w\cdot\frac{1}{1+v^2}\cdot e^u\cdot 3$$
$$=\cosh(\arctan e^{3x})\cdot\frac{1}{1+e^{6x}}\cdot e^{3x}\cdot 3=\frac{3\cdot e^{3x}}{1+e^{6x}}\cdot\cosh(\arctan e^{3x})$$

b) (1^∞) $$y=\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}} \Rightarrow \ln y=\tan\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\ln y=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\frac{\pi x}{2}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)+\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\pi x}{4}}}{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)+\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi/4}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}\cdot\frac{\cos(\pi x/4)}{\sin(\frac{\pi x}{4})}}{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}}$$

3) b çözümünün devamı:

$$\lim_{x\to 1^+} \ln y = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right) + \sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi x}{4}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}}}{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) + \sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi x}{4}\right)}}{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) + \frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}} = -1$$

$\boxed{\lim_{x\to 1^+} y = e^{-1} = \frac{1}{e}}$ olur.

4) (a) $\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx = ?$ b) $\int (4x^2-12x+9)^{\frac{2}{3}}\,dx = ?$

Çözüm: a) $u = 1+\sin^2 x \Rightarrow du = 2\sin x\cdot\cos x\,dx$

$$\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c = \sqrt{1+\sin^2 x} + c$$

b) $\int (4x^2-12x+9)^{2/3}\,dx = \int [(2x-3)^2]^{2/3}\,dx$ $(u = 2x-3 \Rightarrow du = 2dx)$

$$= \frac{1}{2}\int u^{4/3}\,du = \frac{3}{14}u^{7/3} + c = \frac{3}{14}(2x-3)^{\frac{7}{3}} + c$$

5)

$x_0 \in (a,b)$ ve $\forall x \in (a,b)$ alalım. $x > x_0$ ise $[\alpha,\beta] = [x_0, x]$ veya $x < x_0$ ise $[\alpha,\beta] = [x, x_0]$ olmak üzere $f : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[\alpha,\beta]$ üzerinde sürekli ve türevlenebilirdir. O zaman f, $[\alpha,\beta]$-da Lagrange teoremini sağlar. Yani

$f(\beta) - f(\alpha) = f'(c)\cdot(\beta-\alpha)$ o.ş. $\exists c \in (\alpha,\beta)$ vardır.

Şimdi $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ alalım ve $x_1 < x_2$ olsun. Buradan $[\alpha,\beta] = [x_1, x_2]$ alınırsa

$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\cdot(x_2 - x_1)$ olup $f'(c)$ ifadesi hipotezle $(-)$ olduğundan $f(x_2) < f(x_1)$ olur.

Bu ise f azalan demektir.

6(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2+2\cos x-2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ L'Hospital ile

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3}{2x-2\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right)$ L'Hospital

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{12x^2}{2-2\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{24}{2}\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{=1} = 12$ olur.

(b) $y' = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x - \arccos x}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)'$

$= \frac{-x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x}{x^2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(1+\sqrt{1-x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(1-\sqrt{1-x^2})}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}$

$= \frac{-x\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

7) $x^y - y^x = 0$ kapalı şekilde verilen fonk. için

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y} = -\frac{y\cdot x^{y-1} - y^x\cdot\ln y}{x^y\cdot\ln x - x\cdot y^{x-1}}$ olur.

$m_T = y'\big|_{(1,1)} = -\frac{1}{1} = -1$ olur. O zaman $d_T \perp d_N$

olduğundan $m_N = 1$ olup $d_T:\ y-1 = -1\cdot(x-1)$

$d_N:\ y-1 = 1\cdot(x-1)$ bulunur.

8) $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$ için

i) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ dir. Pay ve payda polinom olup tanım kümesi $(\mathbb{R}\cap\mathbb{R})\setminus\{x\in\mathbb{R} : x-2=0\}$ dir.

ii) $f(-x) = \frac{x^2-3}{-x-2}$ olup $f(-x)\neq f(x)$ ve $f(-x)\neq -f(x)$ olmadığından simetri yoktur.

$A(0, 3/2)$, $B(\sqrt{3}, 0)$, $C(-\sqrt{3}, 0)$ noktalarından geçer.

iii) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ old. dan $x=2$ doğrusu hem sağdan hemde soldan düşey asimtot olur.

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ olup $\mp\infty$ kollarda yatay asimtot yoktur. Öyleyse eğik asimtot vardır.

$f(x)=x+2+\dfrac{1}{x-2}$ ifadesinden $y=x+2$ doğrusu $\mp\infty$ kollarda eğik asimtot olur.

iv) $$f'(x)=\frac{2x(x-2)-(x^2-3).1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

ifadesinden $x=2$ # türevlenemezlik noktası, $x=1$ ve $x=3$ noktaları ise kritik noktalardandır.

v)

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$y=x+2$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$y=x+2$

$f(1)=\dfrac{-2}{-1}=2$

$f(3)=\dfrac{6}{1}=6$

$x=1$ y.max. nokt.

$x=3$ y.min nokt.